Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XV**, 8.

EINE DOPPELT-FASTPERIODISCHE GANZE TRANSZENDENTE FUNKTION

VON

RICHARD PETERSEN

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1938

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

In natürlicher Fortsetzung früherer Untersuchungen werde ich jetzt zeigen, wie es möglich ist, durch Anwendung des Runge'schen Verfahrens für Polverschiebung eine doppelt-fastperiodische ganze Transzendente zu konstruieren.

Es sei unsere Ausgangsfunktion eine doppelt-periodische Funktion mit Polen dritter Ordnung in den Punkten eines Quadratnetzes, nämlich in $2p+1+i(2q+1)$, wo (p, q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.

Eine solche Funktion ist

$$f_0(s) = \sum_{(p,q)}' \frac{1}{\left(s-(2p+1)-i(2q+1)\right)^3}, \tag{1}$$

wo $s = \sigma + it$.

Es ist aber zweckmässig, diese Reihe folgendermassen umzuschreiben:

$$f_0(s) = \sum' \left\{ \frac{1}{\left(s-(2p-1)-i(2q-1)\right)^3} + \frac{1}{\left(s-(2p+1)-i(2q-1)\right)^3} + \frac{1}{\left(s-(2p+1)-i(2q+1)\right)^3} + \frac{1}{\left(s-(2p-1)-i(2q+1)\right)^3} \right\};$$

das allgemeine Glied der Reihe enthält die 4 Glieder der ursprünglichen Darstellung, welche den Polen, die Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $2p + i2q$ sind, entsprechen, und die Summation soll über alle Zahlenpaare (p, q) erstreckt werden, deren Koordinaten ganze ungerade Zahlen sind.

Ersetzen wir nun p durch $2p+1$ und q durch $2q+1$, so entsteht die Reihe

$$f_0(s) = \sum{}' \left\{ \frac{1}{\big(s-(4p+1)-i(4q+1)\big)^3} + \frac{1}{\big(s-(4p+3)-i(4q+1)\big)^3} + \frac{1}{\big(s-(4p+3)-i(4q+3)\big)^3} + \frac{1}{\big(s-(4p+1)-i(4q+3)\big)^3} \right\},$$

wo (p, q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft; das allgemeine Glied entspricht den Polen, welche Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $4p+2+i(4q+2)$ sind.

Setzt man

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_0(s-2-i2) = \\ \dfrac{1}{(s-1-i)^3} + \dfrac{1}{(s-3-i)^3} + \dfrac{1}{(s-3-i3)^3} + \dfrac{1}{(s-1-i3)^3}, \end{array}\right\} \quad (2)$$

so lässt die gegebene Funktion sich in der Form

$$f_0(s) = \sum_{(p,q)}{}' \varphi_0\big(s-(4p+2)-i(4q+2)\big) \qquad (1)$$

schreiben. Die Bezeichnungen haben wir hier so gewählt, dass man für gegebene p und q unmittelbar sieht, zu welchem Quadrate das Glied gehört, z. B. erhält man für $p = q = 0$ das Glied $\varphi_0(s-2-i2)$, das gerade den 4 Polen entspricht, die Eckpunkte des Quadrates mit dem Mittelpunkte $2+i2$ sind.

Die Funktion $f_0(s)$ ist doppelt-periodisch mit den Perioden 2 und $i2$.

Die Aufgabe besteht vor allen Dingen aus einer Verschiebung der Pole

$$4p+1+i(4q+1), \quad (4p+3)+i(4q+1),$$
$$(4p+3)+i(4q+3), \quad (4p+1)+i(4q+3)$$

nach dem Mittelpunkte $4p+2+i(4q+2)$ des Quadrates; da $f_0(s)$ aber die oben erwähnten Perioden hat, werden wir uns darauf beschränken nur die Pole $1+i$, $3+i$, $3+i3$, $1+i3$ zu betrachten, und diese sollen nach dem Punkte $2+i2$ verschoben werden. (Fig. 1).

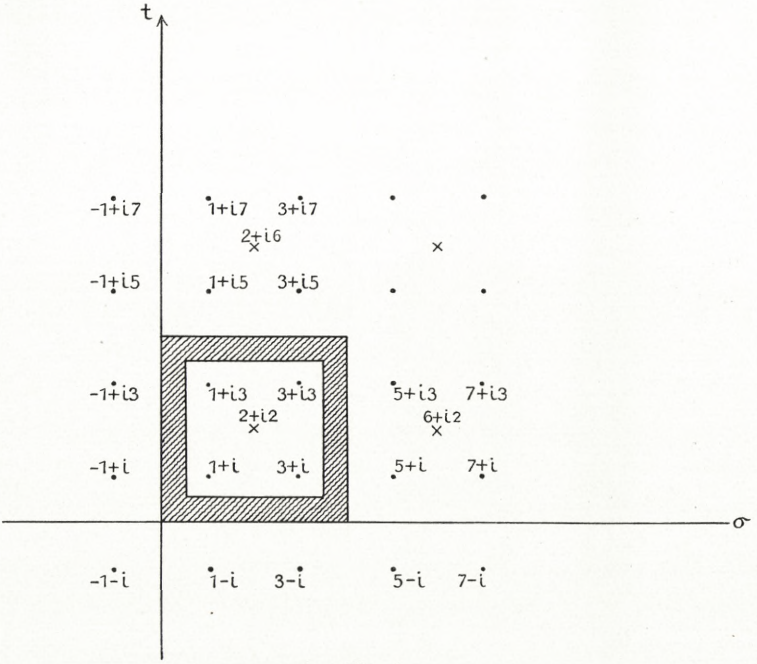

Fig. 1.

Zunächst verschieben wir den Pol $1+i$ nach $2+i2$, dies erreicht man durch Entwicklung des Bruches $\frac{1}{(s-1-i)^3}$ vom Punkte $2+i2$ aus.

Aus

$$\frac{1}{(s-1-i)^3} = \frac{1}{(s-2-i2+1+i)^3}$$

$$= \frac{1}{(s-2-i2)^3} \cdot \left(1 + \frac{1+i}{s-2-i2}\right)^{-3}$$

erhält man durch Anwendung der Binomialreihe

$$\frac{1}{(s-1-i)^3} = \frac{1}{(s-2-i2)^3} + \frac{\binom{-3}{1}(1+i)}{(s-2-i2)^4} + \frac{\binom{-3}{2}(1+i)^2}{(s-2-i2)^5} + \cdots\cdots,$$

diese Entwicklung ist gültig für

$$\left|\frac{1+i}{s-2-i2}\right| < 1 \quad \text{oder} \quad |s-2-i2| > |1+i| = \sqrt{2}.$$

Da der Kreis $|s-2-i2| \leqq \sqrt{2}$ ganz innerhalb des Quadrates mit den Eckpunkten $\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}+i\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}+i\frac{7}{2}$, $\frac{1}{2}+i\frac{7}{2}$ gelegen ist, ist die obige Reihe absolut und gleichmässig konvergent in dem Gebiete der komplexen Ebene, das ausserhalb dieses Quadrates liegt (der Rand soll zum Gebiete mitgerechnet werden). Das hier erwähnte Quadrat werden wir im folgenden mit $Q_{\frac{3}{2}}(2+i2)$ bezeichnen, wo $2+i2$ der Mittelpunkt ist, während der Index $\frac{3}{2}$ seinen Abstand von den Seiten angibt.

In genau derselben Weise verschiebt man dann die übrigen Pole $3+i$, $3+i3$, $1+i3$ nach dem Punkte $2+i2$.

Jetzt haben wir also die vier Entwicklungen

$$\frac{1}{(s-1-i)^3} = \frac{1}{(s-2-i2)^3} + \frac{\binom{-3}{1}(1+i)}{(s-2-i2)^4} + \frac{\binom{-3}{2}(1+i)^2}{(s-2-i2)^5} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(s-3-i)^3} = \frac{1}{(s-2-i2)^3} + \frac{\binom{-3}{1}(-1+i)}{(s-2-i2)^4} + \frac{\binom{-3}{2}(-1+i)^2}{(s-2-i2)^5} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(s-3-i3)^3} = \frac{1}{(s-2-i2)^3} + \frac{\binom{-3}{1}(-1-i)}{(s-2-i2)^4} + \frac{\binom{-3}{2}(-1-i)^2}{(s-2-i2)^5} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(s-1-i3)^3} = \frac{1}{(s-2-i2)^3} + \frac{\binom{-3}{1}(1-i)}{(s-2-i2)^4} + \frac{\binom{-3}{2}(1-i)^2}{(s-2-i2)^5} + \cdots\cdots,$$

welche alle absolut und gleichmässig konvergent sind in dem Gebiete der komplexen Ebene, das ausserhalb des Quadrates $Q_{\frac{3}{2}}(2+i2)$ gelegen ist (der Rand soll zum Gebiete mitgerechnet werden).

Durch Addition ergibt sich eine Entwicklung der Form

$$\varphi_0(s-2-i2) = \frac{4}{(s-2-i2)^3} + \frac{k_{0,1}}{(s-2-i2)^4} + \frac{k_{0,2}}{(s-2-i2)^5} + \cdots, \quad (3)$$

die sowohl ausserhalb des Quadrates $Q_{\frac{3}{2}}(2+i2)$ als auch auf seinem Rande absolut und gleichmässig konvergent ist. Zu bemerken ist aber, dass die Koeffizienten $k_{0,m}$ den Wert 0 annehmen, wenn der Index m eine Zahl der Form $4r+1$, $4r+2$ oder $4r+3$ ist.

Man erhält somit eine dem Pole $2+i2$ entsprechende approximierende Funktion

$$\psi_1(s-2-i2) = \frac{4}{(s-2-i2)^3} + \frac{k_{0,1}}{(s-2-i2)^4} + \cdots + \frac{k_{0,n_1-3}}{(s-2-i2)^{n_1}}, \quad (4)$$

wo n_1 später festgelegt wird.

Wir wollen uns nun einen Überblick über die Güte der Approximation für Werte von s verschaffen, welche fern vom Pole $2+i2$ liegen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die positive ganze ungerade Zahl N_1 so, dass

$$\left|\frac{k_{0,1}}{(s-2-i2)^4}\right| + \cdots + \left|\frac{k_{0,n-3}}{(s-2-i2)^n}\right| + \cdots \leqq \left|\frac{1}{(s-2-i2)^3}\right|$$

gültig ist für alle s ausserhalb oder auf dem Rande des Quadrates $Q_{2N_1}(2+i2)$, dessen Seiten die Entfernung $2N_1$ vom Mittelpunkte $2+i2$ haben, und dessen Eckpunkte

$$2(1-N_1)+i2(1-N_1), \quad 2(1+N_1)+i2(1-N_1),$$
$$2(1+N_1)+i2(1+N_1), \quad 2(1-N_1)+i2(1+N_1)$$

sind. Für diese Werte von s besteht also — ganz unabhängig vom Werte von n_1 — die Ungleichung

$$|\varphi_0(s-2-i2) - \psi_1(s-2-i2)| \leqq \left|\frac{1}{(s-2-i2)^3}\right|. \quad (5)$$

Innerhalb des Quadrates $Q_{2N_1}(2+i2)$ liegen N_1^2 Quadrate, deren Eckpunkte Pole der ursprünglichen Funktion $f_0(s)$ sind. (Fig. 2).

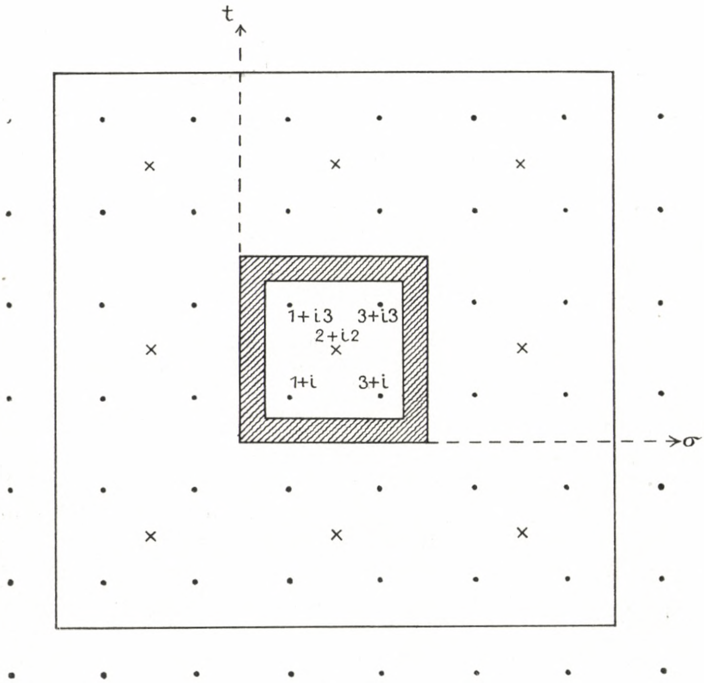

Fig. 2.

Wir gehen jetzt dazu über, die Grösse des die approximierende Funktion (4) charakterisierenden Index n_1 zu bestimmen.

Nachdem wir eine Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ gewählt haben, welche nur der Bedingung $\sum_1^\infty \varepsilon_n$ konvergent unterworfen sein sollen, wird n_1 derart festgelegt, dass die Ungleichung

$$|\varphi_0(s-2-i2)-\psi_1(s-2-i2)| < \frac{\varepsilon_1}{2N_1^2} \tag{6}$$

bei jedem s ausserhalb oder auf dem Rande von $Q_{\frac{3}{2}}(2+i2)$ befriedigt ist.

Mittels der durch die Bedingungen (5) und (6) definierten Funktion $\psi_1(s-2-i2)$ bildet man nun

$$f_1(s) = \sum_{(p,q)}{}' \psi_1\bigl(s-(4p+2)-i(4q+2)\bigr); \tag{7}$$

diese Funktion ist doppelt-periodisch mit den Perioden 4 und $i4$, und sie hat Pole höchstens $n_1$ter Ordnung in den Punkten $4p+2+i(4q+2)$, wo (p, q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.

Als Verschiebungsgebiet $\Gamma_1(2+i2)$ dem ersten Schritte der Polverschiebung entsprechend wählt man das geschlossene Gebiet, das im Inneren des Quadrates $Q_2(2+i2)$, aber ausserhalb des Quadrates $Q_{\frac{3}{2}}(2+i2)$, liegt, und wir setzen ohne weiteres

$$\Gamma_1(2+i2) = Q_2(2+i2) - Q_{\frac{3}{2}}(2+i2)$$

(den Rand mitgerechnet).

Nun wollen wir die Differenz $f_0(s) - f_1(s)$ für die dem Gebiete $\Gamma_1(2+i2)$ angehörigen Werte von s abschätzen.

Aus (1) und (7) folgt

$$\begin{aligned} &f_0(s) - f_1(s) = \\ \sum_{(p,q)}{}' \Bigl\{ \varphi_0\bigl(s-(4p+2)-i(4q+2)\bigr) &- \psi_1\bigl(s-(4p+2)-i(4q+2)\bigr)\Bigr\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Durch die Ungleichungen (5) und (6) erhält man für Werte von s, die zum Gebiete $\Gamma_1(2+i2)$ gehören:

$$\begin{aligned} &\left|\varphi_0\bigl(s-(4p+2)-i(4q+2)\bigr) - \psi_1\bigl(s-(4p+2)-i(4q+2)\bigr)\right| \\ &\qquad \leq \left|\frac{1}{\bigl(s-(4p+2)-i(4q+2)\bigr)^3}\right|, \end{aligned}$$

welche gültig ist, bei allen Indices p und q, die Polen ausserhalb des Quadrates $Q_{2N_1}(2+i2)$ entsprechen, und ferner die Ungleichung

$$\left|\varphi_0(s-(4p+2)-i(4q+2))-\psi_1(s-(4p+2)-i(4q+2))\right| < \frac{\varepsilon_1}{2N_1^2},$$

die bei allen den Polen im Inneren des Quadrates $Q_{2N_1}(2+i2)$ entsprechenden Indices p und q gültig ist.

Aus (8) ergibt sich somit — indem man sich daran erinnert, dass N_1^2 Quadrate im Inneren des Quadrates $Q_{2N_1}(2+i2)$ liegen, deren Eckpunkte Pole der ursprünglichen Funktion $f_0(s)$ sind — die Ungleichung

$$|f_0(s)-f_1(s)| < N_1^2 \cdot \frac{\varepsilon_1}{2N_1^2} + \sum{}' \left|\frac{1}{(s-(4p+2)-i(4q+2))^3}\right|, \quad (9)$$

wo die letzte Summation nur über die Pole ausserhalb $Q_{2N_1}(2+i2)$ erstreckt werden soll.

Jetzt nehmen wir an, dass N_1 schon so gross gewählt ist, dass ausser der Bedingung (5) auch die Ungleichung

$$\sum{}' \left|\frac{1}{(s-(4p+2)-i(4q+2))^3}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (10)$$

für alle s im Gebiete $\Gamma_1(2+i2)$ befriedigt ist, wenn die Summation über alle Pole $4p+2+i(4q+2)$ ausserhalb des Quadrates $Q_{2N_1}(2+i2)$ erstreckt wird. Diese Bedingung ist natürlich wie auch die frühere unabhängig von der Wahl von n_1.

Aus (9) erhalten wir nun

$$|f_0(s)-f_1(s)| < N_1^2 \frac{\varepsilon_1}{2N_1^2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1,$$

also

$$|f_0(s)-f_1(s)| < \varepsilon_1$$

für alle Punkte s im Gebiete $\Gamma_1(2+i2)$. Da aber die Funktion $f_0(s)-f_1(s)$ die primitiven Perioden 4 und $i4$ hat, gilt diese Ungleichuug auch in jedem der Gebiete

$$\Gamma_1\big(4p+2+i(4q+2)\big)$$
$$= Q_2\big(4p+2+i(4q+2)\big)-Q_{\frac{3}{2}}\big(4p+2+i(4q+2)\big),$$

oder mit anderen Worten: sie gilt auch in einem »Kreuze«, das die beiden Achsen umschliesst. Genauer ausgedrückt:

$$|f_0(s)-f_1(s)| < \varepsilon_1 \tag{11}$$

ist gültig für jedes s in den Gebieten

$$-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Damit ist der erste Schritt der Polverschiebung beendet, und wir haben dadurch eine Funktion $f_1(s)$ erreicht, welche doppelt-periodisch mit den Perioden 4 und $i4$ ist und Pole höchstens $n_1$ter Ordnung in den Punkten $4p+2+i(4q+2)$ hat, wo (p,q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.

Als Ausgangsfunktion bei dem zweiten Schritte der Polverschiebung benutzen wir nun diese Funktion

$$f_1(s) = \sum_{(p,q)}' \psi_1\big(s-(4p+2)-i(4q+2)\big); \tag{7}$$

auch an dieser Stelle ist es zweckmässig, die Reihe umzuschreiben und zwar folgendermassen

$$f_1(s) =$$
$$\sum' \Big\{ \psi_1\big(s-(4p-2)-i(4q-2)\big)+\psi_1\big(s-(4p+2)-i(4q-2)\big)$$
$$+\psi_1\big(s-(4p+2)-i(4q+2)\big)+\psi_1\big(s-(4p-2)-i(4q+2)\big)\Big\};$$

das allgemeine Glied dieser Reihe enthält die 4 Glieder der ursprünglichen Darstellung, welche den Polen entsprechen, die Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $4p+i4q$ sind, und die Summation soll über alle Zahlenpaare (p,q), deren Koordinaten ganze ungerade Zahlen sind, erstreckt werden.

Ersetzt man dann p durch $2p+1$ und q durch $2q+1$, so entsteht die Reihe

$$f_1(s) = \sum_{(p,q)}{}' \{ \psi_1(s-(8p+2)-i(8q+2)) + \psi_1(s-(8p+6)-i(8q+2)) + \psi_1(s-(8p+6)-i(8q+6)) + \psi_1(s-(8p+2)-i(8q+6))\},$$

wo (p,q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft; das allgemeine Glied entspricht den Polen, welche Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $8p+4+i(8q+4)$ sind.

Setzt man

$$\varphi_1(s-4-i4) = \psi_1(s-2-i2) + \psi_1(s-6-i2) + \psi_1(s-6-i6) + \psi_1(s-2-i6),$$

so lässt die gegebene Funktion sich auf die Form

$$f_1(s) = \sum_{(p,q)}{}' \varphi_1(s-(8p+4)-i(8q+4)) \tag{7}$$

bringen. Die Bezeichnungen sind derart gewählt, dass man für gegebene p und q unmittelbar sieht, zu welchem Quadrate das Glied gehört, z. B. erhält man für $p=q=0$ das Glied $\varphi_1(s-4-i4)$, das gerade den 4 Polen entspricht, die Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $4+i4$ sind.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Pole

$$(8p+2)+i(8q+2), \quad (8p+6)+i(8q+2),$$
$$(8p+6)+i(8q+6), \quad (8p+2)+i(8q+6)$$

nach dem Mittelpunkte $(8p+4)+i(8q+4)$ des Quadrates zu verschieben; da aber $f_1(s)$ die früher erwähnten Perioden hat, können wir uns darauf beschränken, nur die Pole $2+i2$, $6+i2$, $6+i6$, $2+i6$ zu betrachten, und diese sollen dann nach dem Punkte $4+i4$ verschoben werden.

Das Verfahren bleibt stets in genauer Analogie mit dem bei dem ersten Schritte der Polverschiebung benutzten. Durch Anwendung der Binomialreihe auf die einzelnen Glieder von $\varphi_1(s-4-i4)$, wobei $4+i4$ der Entwicklungspunkt ist, erhält man die folgende Darstellung

$$\varphi_1(s-4-i4) = \frac{16}{(s-4-i4)^3} + \frac{k_{1,1}}{(s-4-i4)^4} + \frac{k_{1,2}}{(s-4-i4)^5} + \cdots;$$

diese Reihe ist absolut und gleichmässig konvergent ausserhalb und auf dem Rande des Quadrates $Q_3(4+i4)$.

Wir finden hieraus eine dem Pole $4+i4$ entsprechende approximierende Funktion

$$\psi_2(s-4-i4) = \frac{16}{(s-4-i4)^3} + \frac{k_{1,1}}{(s-4-i4)^4} + \cdots + \frac{k_{1,n_2-3}}{(s-4-i4)^{n_2}}, \tag{12}$$

wo n_2 doch erst später festgelegt wird.

Wir wollen uns jetzt einen Überblick über die Güte der Approximation für Werte von s verschaffen, welche fern vom Pole $4+i4$ liegen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die positive ganze ungerade Zahl N_2 so, dass

$$\left|\frac{k_{1,1}}{(s-4-i4)^4}\right| + \cdots + \left|\frac{k_{1,n-3}}{(s-4-i4)^n}\right| + \cdots \leq \left|\frac{1}{(s-4-i4)^3}\right|$$

gültig ist für alle s ausserhalb oder auf dem Rande des Quadrates $Q_{4N_2}(4+i4)$, dessen Seiten den Abstand $4N_2$ vom Mittelpunkte $4+i4$ haben, und dessen Eckpunkte

$$4(1-N_2)+i4(1-N_2),\quad 4(1+N_2)+i4(1-N_2),$$
$$4(1+N_2)+i4(1+N_2),\quad 4(1-N_2)+i4(1+N_2)$$

sind. Für diese Werte von s besteht also — ganz unabhängig vom Werte von n_2 — die Ungleichung

$$|\varphi_1(s-4-i4)-\psi_2(s-4-i4)| \leq \left|\frac{1}{(s-4-i4)^3}\right|. \tag{13}$$

Im Inneren des Quadrates $Q_{4N_2}(4+i4)$ liegen N_2^2 Quadrate, deren Eckpunkte Pole der ursprünglichen Funktion $f_1(s)$ sind.

Wir gehen jetzt dazu über, die Grösse des die approximierende Funktion (12) charakterisierenden Index n_2 zu bestimmen.

Wir wählen n_2 derart, dass die Ungleichung

$$|\varphi_1(s-4-i4)-\psi_2(s-4-i4)| < \frac{\varepsilon_2}{2N_2^2} \tag{14}$$

bei jedem s ausserhalb oder auf dem Rande von $Q_3(4+i4)$ befriedigt ist. Mittels der durch die beiden Bedingungen (13) und (14) festgelegten Funktion bildet man nun die Funktion

$$f_2(s) = \sum_{(p,q)}{}' \psi_2(s-(8p+4)-i(8q+4)); \tag{15}$$

diese ist doppelt-periodisch mit den Perioden 8 und $i8$, und sie hat Pole höchstens $n_2$ter Ordnung in den Punkten $8p+4+i(8q+4)$, wo (p,q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.

Als das dem zweiten Schritte der Polverschiebung entsprechende Verschiebungsgebiet $\Gamma_2(4+i4)$ wählen wir das geschlossene Gebiet, das im Inneren des Quadrates $Q_4(4+i4)$, aber ausserhalb des Quadrates $Q_3(4+i4)$, liegt, und wir setzen ohne weiteres

$$\Gamma_2(4+i4) = Q_4(4+i4) - Q_3(4+i4)$$

(den Rand mitgerechnet).

Nun wollen wir die Differenz $f_1(s)-f_2(s)$ für die dem Gebiete $\Gamma_2(4+i4)$ angehörigen Werte von s abschätzen.

Aus (7) und (15) folgt

$$f_1(s)-f_2(s) = \sum_{(p,q)}' \{\varphi_1(s-(8p+4)-i(8q+4))-\psi_2(s-(8p+4)-i(8q+4))\}. \quad (16)$$

Durch die Ungleichungen (13) und (14) erhält man für Werte von s, die zum Gebiete $\Gamma_2(4+i4)$ gehören:

$$\left|\varphi_1(s-(8p+4)-i(8q+4))-\psi_2(s-(8p+4)-i(8q+4))\right| \leqq \left|\frac{1}{(s-(8p+4)-i(8q+4))^3}\right|,$$

welche gültig ist bei allen Indices p und q, die Polen ausserhalb des Quadrates $Q_{4N_2}(4+i4)$ entsprechen, und ferner die Ungleichung

$$\left|\varphi_1(s-(8p+4)-i(8q+4))-\psi_2(s-(8p+4)-i(8q+4))\right| < \frac{\varepsilon_2}{2N_2^2},$$

die bei allen den Polen im Inneren des Quadrates $Q_{4N_2}(4+i4)$ entsprechenden Indices p und q gültig ist.

Aus (16) ergibt sich somit — indem man sich daran erinnert, dass N_2^2 Quadrate im Inneren des Quadrates $Q_{4N_2}(4+i4)$ liegen, deren Eckpunkte Pole der ursprünglichen Funktion $f_1(s)$ sind — die Ungleichung

$$|f_1(s) - f_2(s)| < N_2^2 \frac{\varepsilon_2}{2N_2^2} + \sum{}' \left| \frac{1}{(s-(8p+4)-i(8q+4))^3} \right|, \quad (17)$$

wo die letzte Summation nur über die Pole ausserhalb $Q_{4N_2}(4+i4)$ erstreckt werden soll.

Jetzt nehmen wir an, dass N_2 im voraus so gross gewählt ist, dass ausser der Bedingung (13) auch die Ungleichung

$$\sum{}' \left| \frac{1}{(s-(8p+4)-i(8q+4))^3} \right| < \frac{\varepsilon_2}{2}$$

für alle s im Gebiete $\Gamma_2(4+i4)$ befriedigt ist, wenn die Summation über alle Pole $8p+4+i(8q+4)$ ausserhalb des Quadrates $Q_{4N_2}(4+i4)$ erstreckt wird. Diese Bedingung ist, wie auch die frühere, unabhängig von der Wahl von n_2.

Aus (17) erhalten wir nun

$$|f_1(s) - f_2(s)| < N_2^2 \cdot \frac{\varepsilon_2}{2N_2^2} + \frac{\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2,$$

also

$$|f_1(s) - f_2(s)| < \varepsilon_2 \quad (18)$$

für alle Punkte s im Gebiete $\Gamma_2(4+i4)$. Da aber die Funktion $f_1(s)-f_2(s)$ die primitiven Perioden 8 und $i8$ hat, gilt diese Ungleichung auch in jedem der Gebiete $\Gamma_2(8p+4+i(8q+4))$, oder mit anderen Worten: sie gilt in einem »Kreuze«, das die beiden Achsen umschliesst. Genauer ausgedrückt:

$$|f_1(s) - f_2(s)| < \varepsilon_2 \quad (18)$$

ist gültig für jedes s in den Gebieten

$$-1 \leqq \sigma \leqq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leqq t \leqq 1.$$

Es wird nun angenommen, dass wir durch den $(m-1)$ten Schritt eine Funktion $f_{m-1}(s)$ erreicht haben, welche doppelt-periodisch mit den Perioden 2^m und $i2^m$ ist und Pole höchstens n_{m-1}ter Ordnung in den Punkten eines Quadratnetzes $2^m p + 2^{m-1} + i(2^m q + 2^{m-1})$ hat, wo (p, q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.

In Analogie mit den beiden ersten Schritten wird $f_{m-1}(s)$ auf die Form

$$f_{m-1}(s) = \sum_{(p,q)}{}' \psi_{m-1}\left(s - (2^m p + 2^{m-1}) - i(2^m q + 2^{m-1})\right)$$

gebracht, die man dann in

$$\begin{aligned} f_{m-1}(s) = \sum{}' \Big\{ & \psi_{m-1}\left(s - (2^m p - 2^{m-1}) - i(2^m q - 2^{m-1})\right) \\ & + \psi_{m-1}\left(s - (2^m p + 2^{m-1}) - i(2^m q - 2^{m-1})\right) \\ & + \psi_{m-1}\left(s - (2^m p + 2^{m-1}) - i(2^m q + 2^{m-1})\right) \\ & + \psi_{m-1}\left(s - (2^m p - 2^{m-1}) - i(2^m q + 2^{m-1})\right) \Big\} \end{aligned}$$

überführt. Das allgemeine Glied dieser Reihe enthält die 4 Glieder der ursprünglichen Darstellung, welche den Polen entsprechen, die Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $2^m p + i2^m q$ sind, und die Summation soll über alle Zahlenpaare (p, q), deren Koordinaten ganze ungerade Zahlen sind, erstreckt werden.

Ersetzt man p durch $2p+1$ und q durch $2q+1$, so entsteht die Reihe

$$\begin{aligned} f_{m-1}(s) = \sum_{(p,q)}{}' \Big\{ & \psi_{m-1}\left(s - (2^{m+1} p + 2^{m-1}) - i(2^{m+1} q + 2^{m-1})\right) \\ & + \psi_{m-1}\left(s - (2^{m+1} p + 3\cdot 2^{m-1}) - i(2^{m+1} q + 2^{m-1})\right) \\ & + \psi_{m-1}\left(s - (2^{m+1} p + 3\cdot 2^{m-1}) - i(2^{m+1} q + 3\cdot 2^{m-1})\right) \\ & + \psi_{m-1}\left(s - (2^{m+1} p + 2^{m-1}) - i(2^{m+1} q + 3\cdot 2^{m-1})\right) \Big\}, \end{aligned}$$

wo (p, q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft; das allgemeine Glied entspricht den Polen, welche Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte $2^{m+1}p+2^m+i(2^{m+1}q+2^m)$ sind.

Setzt man

$$\varphi_{m-1}\left(s-2^m-i2^m\right)=$$
$$\psi_{m-1}\left(s-2^{m-1}-i2^{m-1}\right)+\psi_{m-1}\left(s-3\cdot 2^{m-1}-i2^{m-1}\right)$$
$$+\psi_{m-1}\left(s-3\cdot 2^{m-1}-i3\cdot 2^{m-1}\right)+\psi_{m-1}\left(s-2^{m-1}-i\cdot 3\cdot 2^{m-1}\right),$$

so lässt die gegebene Funktion sich auf die Form

$$f_{m-1}(s)=\sum_{(p,q)}{}' \varphi_{m-1}\left(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\right) \tag{19}$$

bringen. Die Bezeichnungen sind so gewählt, dass man für gegebene p und q unmittelbar sieht, zu welchem Quadrate das Glied gehört, z. B. erhält man für $p=q=0$ das Glied $\varphi_{m-1}\left(s-2^m-i2^m\right)$, das gerade den vier Polen entspricht, die Eckpunkte eines Quadrates mit dem Mittelpunkte 2^m+i2^m sind.

Die Aufgabe besteht nun darin. die Pole

$$2^{m+1}p+2^{m-1}+i(2^{m+1}q+2^{m-1}),\qquad 2^{m+1}p+3\cdot 2^{m-1}+i(2^{m+1}q+2^{m-1}),$$
$$2^{m+1}p+3\cdot 2^{m-1}+i(2^{m+1}q+3\cdot 2^{m-1}),\quad 2^{m+1}p+2^{m-1}+i(2^{m+1}q+3\cdot 2^{m-1})$$

nach dem Mittelpunkte $2^{m+1}p+2^m+i(2^{m+1}q+2^m)$ des Quadrates zu verschieben; da aber $f_{m-1}(s)$ die früher erwähnten Perioden hat, können wir uns darauf beschränken, nur die Pole

$$2^{m-1}+i2^{m-1},\quad 3\cdot 2^{m-1}+i2^{m-1},\quad 3\cdot 2^{m-1}+i\cdot 3\cdot 2^{m-1},\quad 2^{m-1}+i\cdot 3\cdot 2^{m-1}$$

zu betrachten, und diese sollen dann nach dem Punkte 2^m+i2^m verschoben werden.

Wir fahren fort in genauer Analogie mit der bei dem ersten und zweiten Schritte der Polverschiebung benutzten Methode. Durch Anwendung der Binomialreihe auf die einzelnen Glieder von $\varphi_{m-1}(s-2^m-i2^m)$, wobei 2^m+i2^m der Entwicklungspunkt ist, erhält man die folgende Darstellung

$$\varphi_{m-1}(s-2^m-i2^m)=\frac{4^m}{(s-2^m-i2^m)^3}+\frac{k_{m-1,1}}{(s-2^m-i\cdot 2^m)^4}+\cdots\cdots,$$

diese Reihe ist absolut und gleichmässig konvergent ausserhalb und auf dem Rande des Quadrates $Q_{3\cdot 2^{m-2}}(2^m+i2^m)$.

Wir finden hieraus eine dem Pole 2^m+i2^m entsprechende approximierende Funktion

$$\psi_m(s-2^m-i2^m)=\frac{4^m}{(s-2^m-i2^m)^3}+\cdots+\frac{k_{m-1,\,n_m-3}}{(s-2^m-i2^m)^{n_m}}, \quad (20)$$

wo n_m doch erst später festgelegt wird.

Die ungerade ganze Zahl N_m bestimmen wir nun so, dass

$$\left|\frac{k_{m-1,1}}{(s-2^m-i2^m)^4}\right|+\cdots+\left|\frac{k_{m-1,n-3}}{(s-2^m-i2^m)^n}\right|+\cdots\leqq\left|\frac{1}{(s-2^m-i2^m)^3}\right|$$

gültig ist für alle s ausserhalb oder auf dem Rande des Quadrates $Q_{2^m N_m}(2^m+i2^m)$, dessen Seiten den Abstand $2^m N_m$ vom Mittelpunkte 2^m+i2^m haben, und dessen Eckpunkte

$$4(1-N_m)+i4(1-N_m), \quad 4(1+N_m)+i4(1-N_m),$$
$$4(1+N_m)+i4(1+N_m), \quad 4(1-N_m)+i4(1+N_m)$$

sind. Für diese Werte von s besteht also — ganz unabhängig vom Werte von n_m — die Ungleichung

$$\left|\varphi_{m-1}(s-2^m-i2^m)-\psi_m(s-2^m-i2^m)\right|\leqq\left|\frac{1}{(s-2^m-i2^m)^3}\right|. \quad (21)$$

Im Inneren des Quadrates $Q_{\frac{2^m}{N_m}}(2^m + i\,2^m)$ liegen N_m^2 Quadrate, deren Eckpunkte Pole der ursprünglichen Funktion $f_{m-1}(s)$ sind.

Wir gehen nun dazu über, die Grösse des Index n_m, der die approximierende Funktion (20) charakterisiert, zu bestimmen; n_m wird so gewählt, dass die Ungleichung

$$\left|\varphi_{m-1}\left(s - 2^m - i\,2^m\right) - \psi_m\left(s - 2^m - i\,2^m\right)\right| < \frac{\varepsilon_m}{2\,N_m^2}$$

bei jedem s ausserhalb oder auf dem Rande von $Q_{3 \cdot 2^{m-2}}(2^m + i\,2^m)$ befriedigt ist.

Mittels der durch die obenerwähnten Bedingungen festgelegten Funktion $\psi_m(s - 2^m - i\,2^m)$ bildet man die Funktion

$$f_m(s) = \sum_{(p,\,q)}{}' \psi_m\left(s - (2^{m+1}p + 2^m) - i(2^{m+1}q + 2^m)\right); \tag{22}$$

diese Funktion ist doppelt-periodisch mit den Perioden 2^{m+1} und $i\,2^{m+1}$, und sie hat Pole höchstens $n_m$ter Ordnung in den Punkten $2^{m+1}p + 2^m + i(2^{m+1}q + 2^m)$, wo (p, q) alle Zahlenpaare mit ganzzahligen Koordinaten durchläuft.

Als Verschiebungsgebiet $\Gamma_m(2^m + i\,2^m)$ dem $m$ten Schritte der Polverschiebung entsprechend wählt man das geschlossene Gebiet, das im Inneren des Quadrates $Q_{2^m}(2^m + i\,2^m)$, aber ausserhalb des Quadrates $Q_{3 \cdot 2^{m-2}}(2^m + i\,2^m)$, liegt, und wir setzen ohne weiteres

$$\Gamma_m(2^m + i\,2^m) = Q_{2^m}(2^m + i\,2^m) - Q_{3 \cdot 2^{m-2}}(2^m + i\,2^m)$$

(den Rand mitgerechnet).

Nun wollen wir die Differenz $f_{m-1}(s) - f_m(s)$ für die dem Gebiete $\Gamma_m(2^m + i\,2^m)$ angehörigen Werte von s abschätzen.

Aus (19) und (22) folgt

$$f_{m-1}(s)-f_m(s)=\sum_{(p,q)}'\Big\{\varphi_{m-1}\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)$$
$$-\psi_m\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)\Big\}. \quad (23)$$

Durch die oben gefundenen Ungleichungen erhält man für Werte von s, die zum Gebiete $\Gamma_m(2^m+i2^m)$ gehören:

$$\Big|\varphi_{m-1}\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)$$
$$-\psi_m\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)\Big|$$
$$\leq\left|\frac{1}{\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)^3}\right|,$$

welche gültig ist bei allen Indices p und q, die Polen ausserhalb des Quadrates $Q_{2^mN_m}(2^m+i2^m)$ entsprechen, und ferner die Ungleichung

$$\Big|\varphi_{m-1}\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)$$
$$-\psi_m\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)\Big|<\frac{\varepsilon_m}{2N_m^2},$$

die bei allen den Polen im Inneren des Quadrates $Q_{2^mN_m}(2^m+i2^m)$ entsprechenden Indices p und q gültig ist.

Aus (23) ergibt sich somit — indem man sich daran erinnert, dass N_m^2 Quadrate im Inneren des Quadrates $Q_{2^mN_m}(2^m+i2^m)$ liegen, deren Eckpunkte Pole der ursprünglichen Funktion $f_{m-1}(s)$ sind — die Ungleichnng

$$\left.\begin{aligned}&|f_{m-1}(s)-f_m(s)|<N_m^2\cdot\frac{\varepsilon_m}{2N_m^2}\\&+\sum{}'\left|\frac{1}{\big(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m)\big)^3}\right|,\end{aligned}\right\}\ (24)$$

wo die letzte Summation nur über die Pole ausserhalb des Quadrates $Q_{2^m N_m}(2^m + i2^m)$ erstreckt werden soll.

Jetzt nehmen wir an, dass N_m im voraus so gross gewählt ist, dass ausser der Bedingung (21) auch die Ungleichung

$$\sum{}' \left| \frac{1}{(s-(2^{m+1}p+2^m)-i(2^{m+1}q+2^m))^3} \right| < \frac{\varepsilon_m}{2},$$

für alle s im Gebiete $\Gamma_m(2^m + i2^m)$ befriedigt ist, wenn die Summation über alle Pole ausserhalb des Quadrates $Q_{2^m N_m}(2^m + i2^m)$ erstreckt wird. Diese Bedingung ist unabhängig von der Wahl von n_m.

Aus (24) erhält man

$$|f_{m-1}(s) - f_m(s)| < N_m^2 \cdot \frac{\varepsilon_m}{2N_m^2} + \frac{\varepsilon_m}{2} = \varepsilon_m,$$

also

$$|f_{m-1}(s) - f_m(s)| < \varepsilon_m$$

für alle Punkte s im Gebiete $\Gamma_m(2^m + i2^m)$. Da aber die Funktion $f_{m-1}(s) - f_m(s)$ die primitiven Perioden 2^{m+1} und $i2^{m+1}$ hat, gilt diese Ungleichung auch in jedem der Gebiete $\Gamma_m(2^{m+1}p + 2^m + i(2^{m+1}q + 2^m))$, oder mit anderen Worten: sie gilt in einem »Kreuze«, dass die beiden Achsen umschliesst. Genauer ausgedrückt:

$$|f_{m-1}(s) - f_m(s)| < \varepsilon_m \tag{25}$$

ist gültig für jedes s in den Gebieten

$$-2^{m-2} \leqq \sigma \leqq 2^{m-2} \quad \text{und} \quad -2^{m-2} \leqq t \leqq 2^{m-2}.$$

Nachdem wir nun die Konstruktion der Funktionen $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_m(s), \cdots$ durchgeführt haben, müssen wir vor allem zeigen, dass die Folge

$$f_0(s),\ f_1(s),\ \cdots,\ f_m(s),\ \cdots$$

eine Grenzfunktion $f(s)$ hat, die eine ganze Transzendente ist.

Zu diesem Zwecke betrachtet man, wie gewöhnlich, das Verhalten im Inneren des Kreises $|s| < \varrho$.

Wird M so gross gewählt, dass $2^{M-2} > \varrho$, ergibt sich aus (25) die Ungleichung

$$|f_{m-1}(s) - f_m(s)| < \varepsilon_m,$$

die für $m \geqq M$ bei allen Punkten s im Inneren des Kreises gültig ist.

Wir gehen jetzt dazu über, die Konvergenz der Reihe

$$f_M(s) + \sum_{M+1}^{\infty} (f_m(s) - f_{m-1}(s))$$

innerhalb des Kreises $|s| < \varrho$ zu untersuchen.

Da die Pole der einzelnen Glieder dieser Reihe alle im Gebiete $|s| \geqq 2^M > 2^{M-2} > \varrho$ liegen, sieht man unmittelbar, dass jedes der Glieder eine analytische Funktion im Gebiete $|s| < \varrho$ ist. Aus der Ungleichung $|f_m(s) - f_{m-1}(s)| < \varepsilon_m$ in Verbindung mit unserer Voraussetzung, dass $\sum_1^{\infty} \varepsilon_m$ konvergent ist, ergibt sich nunmehr durch eine Majorantenbetrachtung, dass die Reihe gleichmässig konvergent für $|s| < \varrho$ ist, und dass ihre Summe $f(s)$ eine analytische Funktion ist.

Dies ist aber damit gleichbedeutend, dass die Folge von Funktionen $f_0(s),\ f_1(s),\ \cdots$ eine Grenzfunktion $f(s)$ hat. Da ϱ beliebig gross gewählt werden kann, haben wir damit bewiesen, dass $f(s)$ eine ganze Transzendente ist.

Um den trivialen Fall, wo $f(s)$ auf eine Konstante reduziert wird, auszuschliessen, wollen wir die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \cdots$ noch einer Bedingung unterwerfen.

Aus

$$f(s) = f_0(s) + \sum_1^{\infty} (f_m(s) - f_{m-1}(s))$$

erhält man für $\sigma = 0$

$$f(it) = f_0(it) + \sum_1^{\infty} (f_m(it) - f_{m-1}(it)),$$

wo

$$| f_m(it) - f_{m-1}(it) | < \varepsilon_m.$$

Wird jetzt ein solcher Wert t_1 von t gewählt, für welchen $f_0(it_1)$ von Null verschieden ist, und wird dann die Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \cdots$ derart festgelegt, dass die Summe der Reihe $\sum_1^{\infty} \varepsilon_m$ kleiner als $\frac{1}{2} | f_0(it_1) |$ wird, so erhält man — indem man sich daran erinnert, dass $f_0(0) = 0$ — die folgenden Ungleichungen

$$| f(it_1) | > | f_0(it_1) | - \sum_1^{\infty} \varepsilon_m > \frac{1}{2} | f_0(it_1) |$$

$$| f(0) | < | f_0(0) | + \sum_1^{\infty} \varepsilon_m < \frac{1}{2} | f_0(it_1) |.$$

Falls man den Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \cdots$ diese verschärfte Bedingung auferlegt, wird $f(s)$ also nicht auf eine Konstante reduziert.

Es bleibt noch übrig, die fastperiodische Struktur der Grenzfunktion zu untersuchen.

c bezeichne eine beliebige positive Zahl; dann bestimmt man M so, dass $2^{M-2} > c$; aus der Darstellung

$$f(s) = f_M(s) + \sum_{M+1}^{\infty} (f_m(s) - f_{m-1}(s))$$

lässt sich nun sofort schliessen, dass $f(s)$ im Streifen $(-c, c)$ fastperiodisch ist, denn die Reihe ist gleichmässig konvergent, und ihre einzelnen Glieder sind in diesem Streifen fastperiodische (sogar reinperiodische) Funktionen. Da aber diese Überlegung für jede feste positive Zahl c gültig ist, haben wir damit bewiesen, dass die Grenzfunktion $f(s)$ jedenfalls in $[\sigma] = [-\infty, +\infty]$ fastperiodisch ist. Als Grenzfunktion reinperiodischer Funktionen ist $f(s)$ übrigens grenzperiodisch.

In genau derselben Weise studiert man das Verhalten im Streifen $-c < t < c$; man zeigt, dass $f(s)$ in diesem Streifen fastperiodisch ist, $f(s)$ ist also in jedem festen Streifen $-c < t < c$ eine fastperiodische Funktion von s, d. h. $f(s)$ ist fastperiodisch in $[t] = [-\infty, +\infty]$.

Es ist uns somit gelungen, eine Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ aufzubauen, welche die folgenden Eigenschaften hat:

$f(\sigma + it)$ ist sowohl eine fastperiodische Funktion von t für jedes feste $\sigma = \sigma_0$ als auch eine fastperiodische Funktion von σ für jedes feste $t = t_0$, und ferner ist $f(\sigma + it)$ eine fastperiodische Funktion von $s = \sigma + it$ in $[\sigma] = [-\infty, +\infty]$ und $[t] = [-\infty, +\infty]$, d. h.

Wir haben die Existenz ganzer transzendenter Funktionen von doppelt-fastperiodischer Struktur bewiesen.

Færdig fra Trykkeriet den 29. Januar 1938.